9 PROJEÇÕES CARTOGRÁFICAS E SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Miljenko Lapaine, Croácia and E. Lynn Usery, EUA

9.1 Introduction

Um mapa é uma projeção de dados, normalmente da Terra real, de corpos celestes ou de um mundo imaginário, para uma representação plana sobre um pedaço de papel ou num display digital como uma tela de computador. Normalmente, os mapas são criados por meio de transformação de dados do mundo real para uma superfície esférica ou elipsoidal (o denominado globo gerador) e então para um plano. As características deste globo gerador são que os ângulos, as distâncias ou superfícies medidas sobre este são proporcionais àquelas medidas na Terra real. A transformação da superfície curva para um plano é conhecida como projeção cartográfica e pode ter diferentes formas, todas elas envolvem distorção em área, ângulo, e/ou distâncias. Os tipos de distorção podem ser controladas para preservar características específicas, mas a projeção cartográfica deve distorcer outras características do objeto representado. O principal problema em cartografia é que, não é possível projetar/transformar uma superfície esférica ou elipsoidal em um plano sem distorção. Somente uma forma de esfera ou de elipsóide pode representar todas as características da Terra ou de um corpo celeste em uma perspectiva verdadeira.

O processo de projeção cartográfica ocorre em três passos:
1) aproximação do tamanho e da forma do objeto (p.ex. a Terra), por uma figura matemática, isto é, por uma esfera ou por um elipsóide;

2) redução da escala da representação matemática para um globo gerador (um modelo de Terra reduzido a partir do qual as projeções cartográficas são feitas) com a escala principal ou escala nominal que é a razão entre o raio do globo gerador e o raio da figura matemática que representa o objeto (Terra) equivalente à escala do mapa plano; e

3) transformação do globo gerador em um mapa pelo uso de uma projeção cartográfica (Figura 9.1).

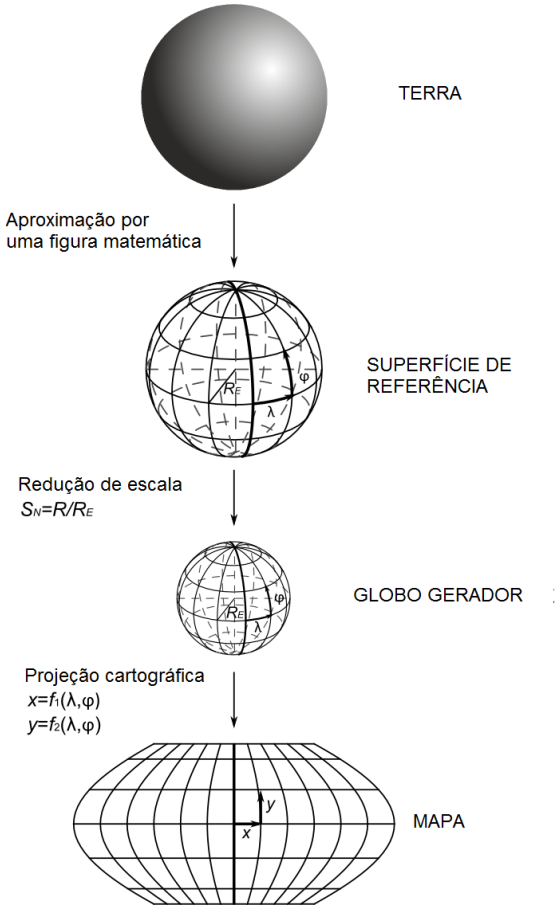


Figura 9.1. Projeção cartográfica da Terra para um mapa final por meio de um globo gerador (Após Canters, 2002).

As projeções cartográficas dependem inicialmente da adoção de parâmetros específicos do objeto em si (Terra), tais como forma esférica ou forma elipsoidal, raio da esfera (ou comprimento dos semi-eixos maior e

menor do elipsóide), e um datum específico ou ponto inicial para a representação de um sistema de coordenadas. Estes aspectos formam a base da ciência denominada Geodésia e são normalmente alcançados por meio de medidas a partir de satélites, normalmente do Global Positioning System – GPS (Sistema de Posicionamento Global), Glonass, ou Galileo (ver seção 9.2). Uma vez que estas medidas são aceitas, uma representação elipsoidal de coordenadas é gerada com coordenadas latitude e longitude. Estas coordenadas podem, então, ser transformadas por meio de equações de uma projeção cartográfica para um sistema plano cartesiano de coordenadas x e y. As equações gerais desta transformação têm a seguinte forma:

$x = f1(\phi,\lambda)$, $y = f2(\phi,\lambda)$

em que:

x é a coordenada plana na direção oeste-este
y é a coordenada plana na direção sul-norte
ϕ é a coordenada latitude
λ é a coordenada longitude

A forma das funções f1 e f2 determina a transformação exata e a característica que a representação elipsoidal ou esférica preservará.

Antes de tratar dos tipos específicos de transformações e das características preservadas, é necessário entender as características geodésicas das coordenadas elipsoidais e como estas são geradas com modernos sistemas de posicionamento por satélites.

9.2 Geodésia e os Sistemas Globais de Navegação por Satélite - Global Navigation Satellite Systems (GNSS)

As projeções cartográficas têm sua maior e mais freqüente aplicação na produção de mapas voltados à apresentação de uma parte pequena ou de uma parte grande da superfície de Terra. Para produzir um mapa de uma região, é necessário fazer um levantamento geodésico da região e então visualizar o resultado. Geodésia é uma tecnologia e ciência que trata do levantamento e representação da superfície da Terra, da determinação da sua forma e dimensões, e do seu campo de gravidade. A Geodésia pode ser dividida em aplicada, física e por satélites.

A geodésia aplicada é a parte da geodésia que engloba os levantamentos da terra, a geodésia de engenharia e o gerenciamento de informação geoespacial. A topografia é uma técnica voltada ao tratamento da posição relativa de objetos da superfície terrestre, para os casos em que não se leva em conta a curvatura terrestre. A geodésia de engenharia é uma parte da geodésia que trata de projeto, medição e supervisão de construções e outros objetos (p.ex. estradas, túneis e pontes).

A geodésia física é a parte da geodésia que trata da do campo gravimétrico da Terra e da sua implicação nas medidas geodésicas. O objetivo maior da geodésia física está na determinação do geóide, uma superfície de nível que modela a Terra tal que o potencial do campo de gravidade é constante. A geodésia geométrica está relacionada à determinação da forma e tamanho da Terra e à localização precisa de suas partes, esta considera a curvatura da Terra.

A geodésia por satélites é a parte da geodésia que trata do uso de satélites para medidas. No passado, a posição exata de pontos isolados sobre a Terra era determinada na astronomia geodésica, isto é, a partir da realização de medidas feitas à posições das estrelas. As técnicas em geodésia por satélites constituem-se no uso geodésico de Sistemas de Satélites de Navegação Globais (Global Navigation Satellite Systems - GNSS) tais como GPS, Glonass e Galileo.

Um sistema de navegação por satélite é um sistema de satélites que provê posicionamento geoespacial autônomo com cobertura global. O sistema permite que receptores eletrônicos pequenos determinem sua posição (latitude, longitude e altitude) com precisão, a partir do uso de sinais de tempo transmitidos na forma de visada de rádio a partir dos satélites. Os receptores calculam o tempo exato e também a aposição. Um sistema de navegação por satélite com cobertura global pode ser denominado de sistema de satélites para navegação global ou GNSS. A China está em processo de expansão do seu sistema de navegação local Beidou para um GNSS para 2020. O sistema de posicionamento Galileo, da União Européia, é um sistema global em fase inicial de implantação, previsto para ser operacional em 2020, pelo menos. França, Índia e Japão estão em fase de desenvolvimento de sistemas de navegação regionais. A cobertura global para estes sistemas é geralmente satisfeita para o caso de constelações de 20 a 30 satélites em órbita terrestre média, espalhados em vários planos orbitais. Os sistemas existentes variam, mas têm inclinação orbital maior do que 50 graus, e período orbitais de 12 horas, a uma altitude de aproximadamente 20.000km.

A fotogrametria é uma tecnologia importante de aquisição de informação quantitativa confiável de objetos físicos e do ambiente, a partir do registro, medida e interpretação de fotografias e cenas de radiação eletromagnética obtidas de sistemas sensores. Sensoriamento remoto é um método de coleta e de interpretação de dados de objetos à distância. O método

é caracterizado pelo fato de que o dispositivo medidor não esta em contato com o objeto a ser levantado. Sua aplicação mais freqüente se dá em plataformas aéreas ou em plataformas espaciais.

O estudo da transformação do modelo de superfície da Terra ou globo gerador para uma representação bi-dimensional requer o uso dos seguintes conceitos: elipsóide, datum, e sistemas de coordenadas. Cada um destes é discutido a seguir.

O *elipsóide da Terra* é qualquer elipsóide que aproxime a figura da Terra. Em geral, um elipsóide tem três eixos diferentes, mas em geodésia e em cartografia, o elipsóide de revolução com pequeno achatamento é mais freqüente (Figura 9.2).

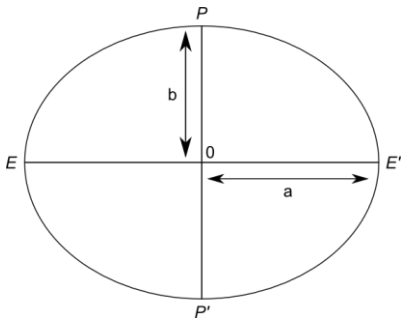


Figura 9.2. Terminologia para um elipsóide de revolução: EE' é eixo maior, PP' é o eixo menor e eixo de rotação, enquanto que a é o semi-eixo maior e b é o semi-eixo menos.

O elipsóide de revolução é uma superfície que resulta da rotação de uma elipse em torno de um de seus eixos. O elipsóide de revolução é usado para modelar a Terra. A lista de elipsóides famosos inclui aquele proposto por Bessel (1841), e elipsóides mais recentes como WGS84 e GRS-80. O achatamento é usado para determinar a diferença entre o elipsóide e a esfera. O achatamento é definido pela equação $f = \frac{a-b}{a}$, em que a e b são o semi-eixo maior e o semi-eixo menor, respectivamente. O semi-eixo maior a, é o raio equatorial porque o equador é um círculo. O semi-eixo menor b, não é um raio, porque qualquer seção plana do elipsóide que contenha os pólos P e P' é uma elipse e não um círculo.

De um modo geral, um *datum* é um conjunto de parâmetros que são referência para determinar outros parâmetros. Um *datum geodésico* descreve a relação de origem e orientação de eixos em um sistema de coordenadas em relação à Terra. São necessários ao menos oito parâmetros para definir um *datum* global: três para a determinação da origem, três para a determinação da orientação do sistema de coordenadas e dois para a determinação do elipsóide. Um *datum* bidimensional é uma referência para definir coordenadas bidimensionais numa superfície. A superfície pode ser um elipsóide, uma esfera, ou mesmo um plano, para o caso da região de interesso ser relativamente pequena. Um *datum* unidimensional ou *datum* vertical é a base para a definição de altitudes e normalmente em relação ao nível médio do mar.

Os elipsóides *WGS84* e *GRS80* foram estabelecidos por meio de técnicas de posicionamento por satélites. Eles são referenciados ao centro de massa da Terra (isto é, são geocêntricos) e proporcionam uma adequação razoável para toda a Terra. O *WGS84* provê a base para coordenadas coletadas do *GPS*, embora receptores modernos transformem coordenadas para, praticamente, qualquer *datum* de referência selecionado pelo usuário.

A necessidade de transformação de *datum* ocorre para o caso em que os dados pertencem a um *datum* e há a necessidade de tê-los em outro (p.ex. *WGS84* para *Noth American Datum* de 1927, ou vice-versa). Há vários caminhos diferentes para transformar *datum*, e o leitor deve consultar as referências geodésicas apropriadas (veja a seção Leitura Complementar) ou os manuais do dispositivo.

9.3 Sistemas de referência de coordenadas tridimensionais

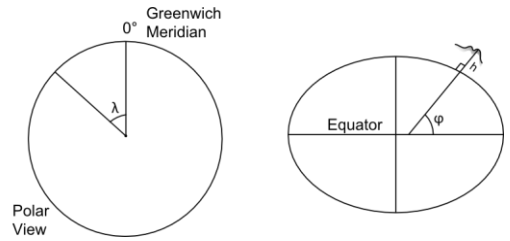


Figure 9.3. Sistema de coordenadas Geodésicas ou elipsoidais.

As coordenadas geodésicas são a latitude geodésica e a longitude geodésica, com ou sem altitude. Elas também são chamadas de coordenadas elipsoidais.

Latitude geodésica é um parâmetro que determina a posição de paralelos no elipsóide da Terra e é definida pelo ângulo do plano do equador ao plano normal (ou linha perpendicular) ao elipsóide em um dado ponto. Normalmente encontra-se no intervalo *[-90° , 90°]* e é identificada pela letra grega *φ*. Um incremento em latitude geodésica indica a direção do Norte, e um decremento indica a direção Sul. A longitude geodésica é um parâmetro que determina a posição do meridiano no elipsóide da Terra e é definida pelo ângulo entre o plano

do meridiano origem (que é o meridiano do observatório *Greenwich* perto de Londres) a um dado ponto no plano do meridiano. O valor está compreendido normalmente ao intervalo *[–180°, 180°]* e é identificada pala letra grega λ. Um incremento em longitude indica a direção Leste, enquanto um decréscimo indica a direção Oeste (Figura 9.3).

Um *datum* geodésico deve definir a relação entre coordenadas geodésicas e a Terra. As coordenadas geodésicas φ, λ e a altitude h, podem ser transformadas para coordenadas referidas a um sistema de coordenadas cartesianas tridimensionais, centrado na Terra, pelo uso das equações:

$$X = (N+h)\cos\varphi\cos\lambda$$
$$Y = (N+h)\cos\varphi\sin\lambda$$
$$Z = (N(1-e^2)+h)\sin\varphi$$

onde:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\ e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}.$$

Ao se representar uma parte grande da Terra, um continente ou mesmo o mundo todo, o achatamento da Terra pode ser desprezado. Neste caso, trata-se com um sistema de *coordenadas geográficas* ao invés de sistema de *coordenadas geodésicas*. Coordenadas geográficas são latitude geográfica e longitude geográfica, com ou sem altitude. São conhecidas também como coordenadas esféricas. Latitude geográfica é um parâmetro que determina a posição de paralelos na esfera da Terra, e é definida pelo ângulo do plano do equador ao plano normal (ou linha perpendicular) à esfera em um dado ponto. Normalmente encontra-se no intervalo *[-90°, 90°]*, e é identificada pela letra grega φ. Um incremento em latitude geográfica indica a direção do Norte, e um decremento indica a direção Sul. A longitude geográfica é um parâmetro que determina a posição do meridiano numa esfera da Terra, e é definida pelo ângulo do plano do meridiano origem a um dado ponto no plano do meridiano. O valor está compreendido normalmente ao intervalo *[–180°, 180°]*, e é identificada pala letra grega λ. Um incremento em longitude indica a direção Leste, enquanto um decréscimo indica a direção Oeste (Figura 9.4).

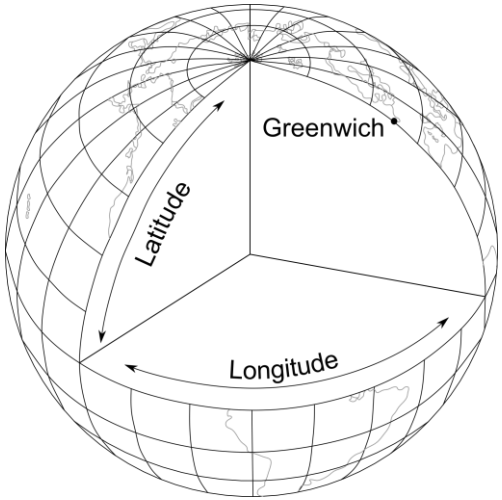


Figura 9.4. Sistema de coordenadas Geográficas ou esféricas: latitude geográfica φ, longitude geográfica.

As coordenadas geográficas φ, λ, e a altitude $h=0$, podem ser transformadas para coordenadas cartesianas tridimensionais de um sistema centrado na Terra, de pelo uso das equações:

$$X = R\cos\varphi\cos\lambda$$
$$Y = R\cos\varphi\sin\lambda$$
$$Z = R\sin\varphi$$

onde R é um raio para a Terra esférica.

Um sistema de coordenadas esféricas pode ser obtido como um caso especial de um sistema de coordenadas geodésicas, por se considerar o achatamento igual a zero, $f=0$, ou de modo análogo, por estabelecer que a excentricidade é igual a zero, $e=0$.

Algumas vezes, nas práticas de geodésia e de cartografia, é necessário transformar coordenadas cartesianas tridimensionais em coordenadas esféricas, ou mesmo em coordenadas elipsoidais. Além disso, algumas vezes há a necessidade de fazer uma transformação de um sistema de coordenadas tridimensionais para outro. Existem métodos ou equações apropriadas, mas o leitor deverá consultar a literatura disponível (ver o capítulo Leitura Complementar).

9.4 Sistemas de Referência de Coordenadas Bidimensionais

Em geral, para o uso de dados geoespaciais há necessidade de ter uma grade de referência, e isso é feito normalmente em um sistema de referência plano. Pelo fato dos mapas existirem em um sistema geométrico plano, as coordenadas esféricas ou as coordenadas elipsoidais, produzidas de sistemas de posicionamento ou de outro dispositivo de levantamento, devem ser matematicamente transformadas para o sistema de geometria plana. A transformação mais simples assume que a coordenada

plana *x* é equivalente a ϕ, e a coordenada plana *y* é equivalente a λ. O resultado é conhecido como a projeção de Plate Carrée, que embora seja simples, envolve distorção significativa nas posições e por isso apresenta áreas, maioria das distâncias e ângulos distorcidos ou deformados.

Transformações mais sofisticadas permitem a manutenção de representações acuradas de área ou distância ou ângulos, ou outras características, mas não todas podem ser preservadas numa mesma transformação. De fato, somente uma característica, por exemplo, a preservação acurada de área, pode ser mantida, e há ocorrência da distorção de outras características. Por isso, muitas projeções cartográficas foram desenvolvidas para permitir a manutenção de características específicas que o usuário do mapa possa demandar. As seções seguintes contêm uma discussão e a base matemática para as transformações que preservam características específicas da Terra, especificamente área, ângulos e distâncias.

O sistema de coordenadas Universal Transverso de Mercator (UTM) é baseado em projeções de fusos de *6°* de amplitude em longitude, amplitude de *80°*S a *84°*N em latitude, e o fator de escala de 0,9996 é especificado para o meridiano central de cada fuso, o que conduz a um erro máximo de 1/2500. No hemisfério Norte a coordenada *x* do meridiano central é transladada para ter valor de *500.000* metros ao invés de zero, normalmente denominada "Este falso". A coordenada *y* é definida como zero no equador. No hemisfério sul, o falso este é também 500.000 metros com uma translação de coordenada do equador de *10.000.000* metros denominada de “Norte Falso”. Estas translações forçam todas as coordenadas a ter valores positivos.

No Sistema de Grade Militar Universal (*Universal Military Grid System - UMGS*), as áreas polares, ao norte de *84°*N e *80°*S, são projetadas segundo a Grade Estereográfica Polar Universal (*Universal Polar Stereographic (UPS) Grid*), com o pólo como centro da projeção e com um fator de escala de 0,9994. Estas regiões são denominadas "Zona Norte" e "Zona Sul".

Uma projeção cartográfica é também dependente da forma do país. Nos Estados Unidos, o Sistema de Coordenadas Plano é estabelecido em estados com direção este-oeste maior, *Tennessee* , por exemplo, usa a projeção Cônica Conforme de Lambert, enquanto que estados com maior dimensão na direção norte-sul, *Illinois*, por exemplo, usa a projeção Transversa de Mercator. Não somente a projeção cartográfica e a escala do mapa, mas as unidades de medida das coordenadas são também parte importante de qualquer mapa. De modo a estar certo da acurácia com que os dados são obtidos de um mapa, deve-se ler cuidadosamente toda a informação escrita na borda do mapa e, se necessário, solicitar mais informação à Agência Nacional de Mapeamento.

Um sistema de coordenadas final, de relevância à modelagem e à análise de dados, particularmente para imagens de satélite e fotografias, é um sistema de coordenadas de imagem. Um sistema de imagem digital não é um sistema de coordenadas cartesiano de mão direita, pois o ponto inicial de coordenadas (0,0) é atribuído ao canto superior direito da imagem. A coordenada *x*, freqüentemente chamada de amostra, é incrementada para a direita, mas a coordenada *y*, chamada linha, é incrementada para baixo. As unidades normalmente são expressas em elementos de imagem ou *pixels*. Um *pixel* é uma unidade discreta da superfície da Terra, usualmente quadrado com um tamanho definido, freqüentemente expresso em metros.

Com frequência, na prática da geodésia e da cartografia, é necessário transformar coordenadas bidimensionais cartesianas planas em outro sistema de coordenadas bidimensional plano. O método indireto transforma coordenadas bidimensionais planas em coordenadas esféricas ou elipsoidais pela aplicação de equações inversas de projeção cartográfica. Então o método prossegue com as equações de projeção cartográfica apropriadas que dão o resultado no segundo sistema plano de coordenadas bidimensionais. O método direto transforma coordenadas planas de um sistema para outro pelo uso de rotação, translação, mudança de escala ou qualquer outra transformação bidimensional. Para mais detalhes o leitor deverá consultar as referências.

9.5 Classes de Projeções Cartográficas

As projeções podem ser classificadas com base na geometria, na forma, nas propriedades especiais, em parâmetros de projeção e na nomenclatura. A classificação geométrica é baseada nos padrões de rede (rede de paralelos de latitude e de meridianos de longitude). De acordo com esta classificação, as projeções cartográficas são referidas como cilíndricas, cônicas e azimutais, mas também há outras. Nas referências pode-se encontrar uma descrição completa destes padrões geométricos e nomes associados.

Uma projeção azimutal também projeta a imagem da Terra num plano. Um mapa produzido em uma projeção cilíndrica pode envolver um cilindro, enquanto que um mapa em projeção cônica pode envolver um cone. Inicialmente, aceita-se que todas as projeções cartográficas em uso são derivadas ou desenvolvidas pelo uso de matemática, especialmente sua parte conhecida como cálculo diferencial. Este processo permite a preservação de características específicas e a

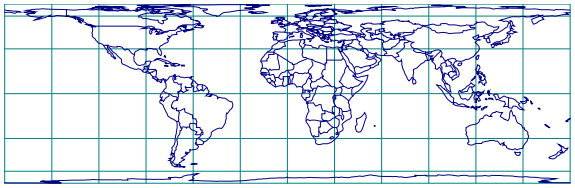
minimização de distorção, tais como relacionamentos angulares (forma) ou área.

9.5.1 Projeções Cilíndricas

As projeções cilíndricas são aquelas que têm uma aparência de retângulo. O retângulo pode ser visto como uma superfície cilíndrica desenvolvida que pode ser enrolada como um cilindro. Apesar destas projeções serem criadas matematicamente, ao invés de ter origem num cilindro, a sua aparência final sugere terem construção cilíndrica. Uma projeção cartográfica cilíndrica pode ter uma ou duas linhas em que não ocorre distorção de escala. Exemplos clássicos de projeções cilíndricas são a projeção conforme de Mercator e a projeção cilíndrica equivalente de Lambert (Figura 9.5).

As projeções cilíndricas são usadas frequentemente para mapas do mundo com amplitude coerente em latitude para evitar a grande distorção das áreas polares deste método de projeção. O aspecto normal da projeção de Mercator é usado mundialmente em cartas náuticas, enquanto que seu aspecto transversal é usado normalmente para mapas topográficos e é a projeção usada para o sistema de coordenadas UTM descrito acima.

a.



b.

Figura 9.5. A projeção de Mercator cilíndrica conforme (a) e a projeção cilíndrica equivalente de Lambert (b).

9.5.2 Projeções Cônicas

As projeções cônicas dão aparência de uma superfície de cone desenvolvida que pode ser enrolada num cone. Estas projeções são normalmente criadas matematicamente e não por projeção sobre uma superfície cônica. Existe uma única linha, ou duas linhas, que não sofrem distorção de escala.

a.

b.

Figura 9.6. Projeções cônica conforme de Lambert (a) e cônica equivalente de Albers (b).

As projeções cônica conforme de Lambert e a projeção cônica equivalente de Albers são exemplos clássicos de projeções cônicas (Figura 9.6). As projeções cônicas não são apropriadas para a representação do mundo todo, e são melhores para regiões com extensão maior na direção Oeste-Leste. Isso as torna ideais para representação áreas do hemisfério norte, tais como estados Unidos, Europa ou Rússia.

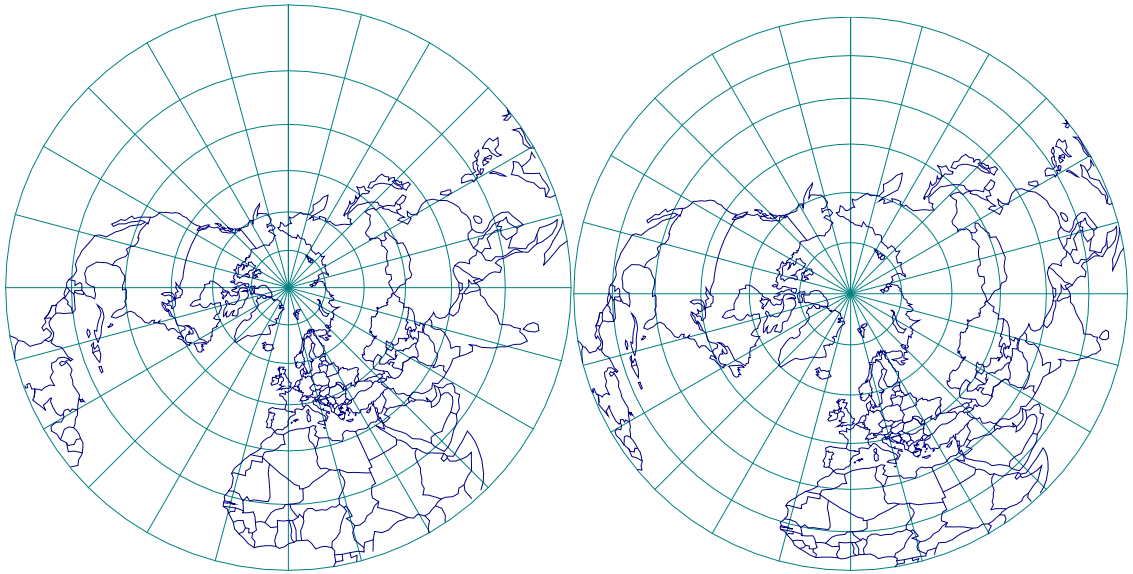
9.5.3 Projeções Azimutais

As projeções azimutais são aquelas que preservam azimutes (isto é, direções relacionadas ao Norte, em seu aspecto normal). Existe um único ponto, ou um círculo, que não é afetado de distorção de escala. As projeções azimutal estereográfica e azimutal equivalente de Lambert são exemplos clássicos de projeções azimutais (Figura 9.7).

9.5.4 Outras Classificações

Outras classificações das projeções cartográficas são baseadas no aspecto (isto e, na aparência e posição do reticulado, pólos ou equador na projeção). O aspecto pode ser polar, equatorial, normal, transverso ou oblíquo. Como consequência há projeções cartográficas polares, normais, equatoriais, transversas e obliquas. Estes são nomes de conjuntos individuais de projeções cartográficas e não uma categorização sistemática, pois, por exemplo, uma projeção pode ser polar e normal ao mesmo tempo. Teoricamente, cada projeção pode ter qualquer aspecto. Entretanto, muitas projeções são quase sempre usadas em certos aspectos de modo a expressar suas características tão bem quanto possível.

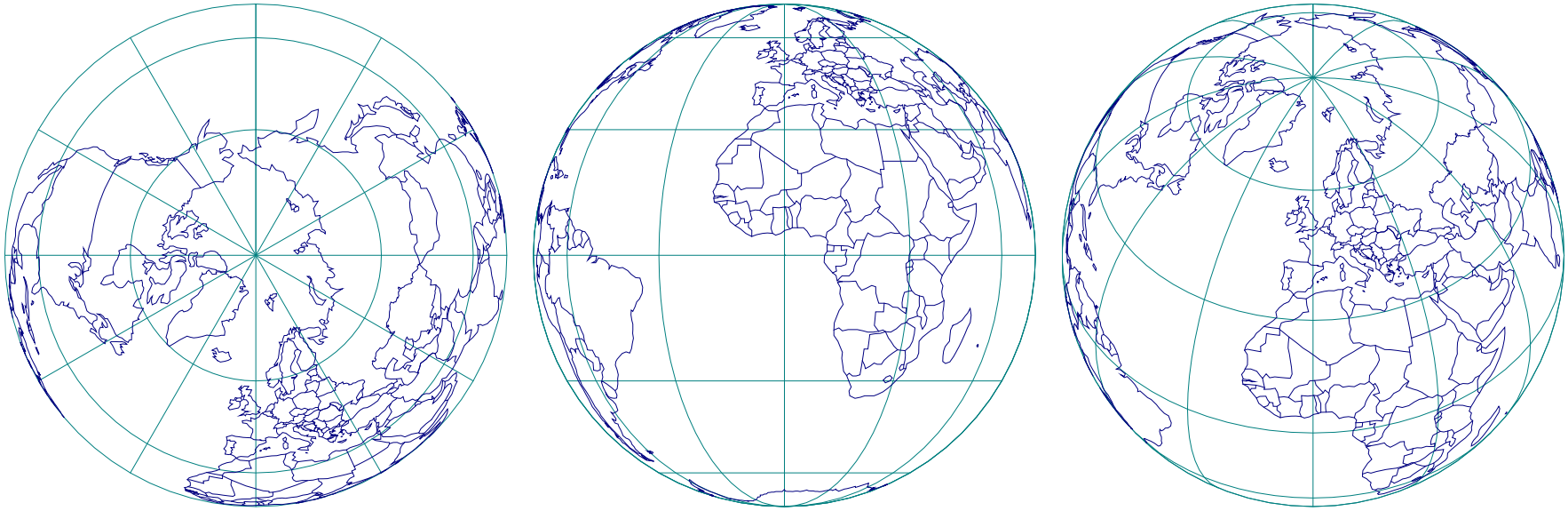
Por exemplo, muitos fatores tais como temperatura, uma manifestação de contaminação e a biodiversidade dependem do clima (isto é, da latitude). Para projeções com distâncias constantes entre os paralelos, a latitude, no aspecto equatorial, pode ser diretamente convertida em distância, e assim facilitar comparações. Certas projeções com reticulados, que no aspecto normal aparecem como curvas simples, foram originalmente definidas por construções geométricas.



a. b.

Figura 9.7. Projeção estereográfica (a) e projeção azimutal equivalente de Lambert (b).

Considerando que a maioria das projeções transversas e oblíquas têm reticulados composto por curvas complexas, tais projeções não foram sistematicamente analisadas antes da era do computador. De modo geral, calcular projeções oblíquas para um elipsóide particular é bastante complexo e não é desenvolvido para todas as projeções. Embora haja aplicação para projeções oblíquas.



a. b. c.

Figura 9.8. Projeção ortográfica em seus aspectos normal (a), transverso (b) e obliquo (c).

Uma projeção cartográfica é uma projeção normal, ou está em aspecto normal, se a aparência e a posição do reticulado, dos pólos e do equador na projeção, são mais naturais, e, normalmente, são determinados por condições geométricas. Normalmente são determinadas por cálculos mais simples ou pela aparência mais simples do reticulado. O aspecto polar é normal para projeções azimutais, enquanto que o aspecto equatorial é normal para projeções cilíndricas. Em projeções azimutais e em projeções cônicas o reticulado consiste de linhas retas e arcos de circunferência; projeções cilíndricas de aspecto normal têm reticulados caracterizados por somente linhas retas que formam uma grade retangular.

Uma projeção cartográfica é uma projeção transversa, ou está num aspecto transverso, se a aparência e a posição do reticulado, os pólos ou o equador na projeção tenham sido derivados por aplicação de fórmulas para o aspecto normal para um globo que foi previamente girado de *90°* em torno do seu centro, de modo que os pólos estão no plano do equador.

Uma projeção cartográfica é uma projeção polar, ou está num aspecto polar, se a imagem de um pólo está no centro do mapa. Normalmente é usada como sinônimo de aspecto normal de projeção azimutal.

Uma projeção cartográfica é equatorial, ou está num aspecto equatorial, se a imagem do equador está no centro do mapa. A imagem do equador é posta na direção de um dos eixos principais, na maioria das vezes na horizontal. Projeção equatorial normalmente significa o aspecto normal de uma projeção cilíndrica.

Uma projeção cartográfica é uma projeção oblíqua, ou está num aspecto oblíquo, se não for polar, nem for equatorial, nem for normal e for nem transversa (Figura 9.8).

9.6 Manutenção de Propriedades Específicas com Projeções Cartográficas

As projeções cartográficas normalmente são propostas para preservar alguma característica específica do globo, tal como áreas, ângulos, distâncias ou uma propriedade específica, tal como círculos máximos (interseções da Terra com planos que passam pelo centro da Terra) se tornarem linhas retas. Mapas com ângulos preservados são chamados projeções *conformes*.Mapas com áreas preservadas são tratados como projeções equivalentes ou de área igual.

9.6.1 Manutenção de Ângulos

Gerardus Mercator desenvolveu, em 1569, uma projeção conforme cilíndrica que leva seu nome. Ele a desenvolveu para mostar linhas loxodrômicas ou linhas de rumo, que são linhas de rumo constante, como linhas retas, pois isso tornava possível navegar um curso constante baseado no desenho de uma linha de rumo sobre a carta. A projeção de Mercator tem os meridianos como linhas paralelas igualmente espaçadas, com paralelos mostrados como linhas retas paralelas com espaçamento não regular mais próximas próximo ao equador e perpendiculares aos meridianos. Os pólos Norte e Sul não podem ser apresentados. A escala é verdadeira ao longo do equador ou ao longo de dois paralelos eqüidistantes do equador. Ocorre significativa distorção em tamanho em altas latitudes e por isso que a projeção de Mercator não é apropriada para mapas do mundo (Figura9.5.a). A projeção de Mercator, um padrão para cartas marinhas, foi definida para cartas de navegação e é melhor usada para propósitos de navegação.

Transversa de Mercator

A projeção transversa de Mercator, também conhecida como projeção de Gauss-Kruger, é uma projeção em que a escala constante está ao longo de um meridiano e não ao longo do equador. O meridiano central e o equador são linhas retas. Os meridianos e os paralelos são curvas complexas e os meridianos têm a concavidade voltada para o meridiano central. A projeção tem escala verdadeira ao longo do meridiano central. Esta projeção é normalmente usada para apresentações de pequenas áreas em grandes escalas. Devido à distribuição da distorção, é normalmente usada em mapeamento de regiões divididas em zonas de três por três ou seis por seis graus limitadas por meridianos. Esta projeção é largamente utilizada para mapas topográficos de escala 1:25.000 a 1:250.000, e é a base para o sistema de coordenadas UTM.

Cônica Conforme de Lambert

A projeção cônica conforme de Lambert, apresentada por Johann Heinrich Lambert em 1772, mosta os meridianos como linhas retas igualmente espaçadas convergentes num dos pólos (Figura 9.6a). Os ângulos entre os meridianos na projeção são menores do que os correspondentes ângulos no globo. Os paralelos são arcos de círculo desigualmente espaçados centrados no pólo, e o espaçamento entre os paralelos aumenta com o afastamento do pólo. O pólo mais próximo do paralelo de contato aparece como um ponto, e o outro pólo não pode ser mostrado. A escala é verdadeira ao longo de um paralelo padrão ou ao longo de dois paralelos padrão, e é constante ao longo de qualquer paralelo. Esta projeção é bastante utilizada para mapeamento em grandes escalas de regiões com direção alongada na direção Oeste-Este e em regiões de média latitude. A projeção é um padrão em muitos países para mapas de escala 1:500.000 e também para cartas aeronáuticas de escala similar

Estereográfica

A projeção estereográfica, desenvolvida por volta do Século 2 A.C., é uma projeção azimutal perspectiva que preserva ângulos (isto é, é conforme). Esta projeção é a única projeção em que todos os círculos do globo são representados como círculos no plano de projeção. Os aspectos polar, equatorial e oblíquo resultam em diferentes aparências de reticulado. O aspecto polar é alcançado pela projeção a partir de um pólo a um plano tangente no outro pólo. Neste aspecto, os meridianos são linhas retas igualmente espaçadas que se interceptam no pólo segundo ângulos verdadeiros. Os paralelos são círculos com espaçamento desigual, centrados no pólo que é representado por um ponto. O espaçamento dos paralelos aumenta com o afastamento do pólo. A projeção estereográfica é usada no aspecto polar para mapas topográficos de regiões polares. A projeção Estereográfica Polar Universal (*Universal Polar Stereographic - UPS*), é a projeção irmã da projeção UTM para mapeamento com propósitos militares. Esta projeção geralmente é escolhida para regiões que têm forma próxima da forma circular. Na sua forma elipsoidal oblíqua, esta projeção é usada em diversos países, dentre os quais o Canadá, Romênia, Polônia e Holanda. Diferentes países têm diferentes desenvolvimentos matemáticos ou versões da projeção estereográfica.

9.6.2 Manutenção de Áreas

Equivalente Cilíndrica de Lambert

A projeção equivalente cilíndrica foi apresentada por Johann Heinrich Lambert em 1772. Esta projeção se tornou a base para muitas projeções equivalentes

similares, dentre elas a projeção ortográfica de Gall, projeção de Behrmann, e a projeção de Trystan-Edwards. A projeção original de Lambert usa uma única linha de escala constante ao longo do equador (Figura 9.5b). Projeções equivalentes similares são construídas com dois paralelos como linhas de escala constante. Na projeção equivalente cilíndrica de Lambert os meridianos são linhas retas igualmente espaçadas e o equador é π vezes mais longo do que os meridianos. Mudar o espaçamento dos paralelos é o método usado para preservar áreas. Entretanto ocorre distorção significativa em distância e em ângulo em altas latitudes próximo aos pólos. Esta projeção não é frequentemente usada diretamente para construção de mapas, mas é um padrão para descrever princípios de projeções cartográficas em livros-texto, e também serviu como um protótipo para outras projeções.

Mollweide

Em 1805, Carl Brandan Mollweide desenvolveu uma projeção equivalente pseudocilíndrica na qual o meridiano central é uma linha reta com a metade do comprimento do equador e que forma uma região elíptica para a projeção do globo inteiro. Os meridianos a *90°* a Leste a e Oeste do meridiano central formam um círculo na projeção de Mollweide. Outros meridianos são semi-elipses igualmente espaçadas que se interceptam nos pólos e são côncavos na direção do meridiano central. Os paralelos são linhas retas com espaçamento não regular e são perpendiculares ao meridiano central. Os paralelos são mais espaçados em baixas latitudes e o espaçamento muda gradualmente.

Figura 9.9. Logo da ICA (Associação Cartográfica Internacional) na projeção Mollweide.

Os pólos, Norte e Sul, são mostrados como pontos e a escala é verdadeira apenas ao longo do paralelo 44° 44' Norte e Sul, e constante ao longo de qualquer paralelo. O globo inteiro, projetado e centrado no meridiano de Greenwich está mostrado na Figura 9.9. A projeção de Mollweide ocasionalmente é usada em mapas do mundo, perticularmente mapas temáticos em que a manutenção de área é importante. Aspectos diferentes da projeção de Mollweide têm sido usados com propósitos educacionais, e esta projeção foi escolhida par o logotipo da Associação Internacional de Cartografia (International Cartographic Association – ICA) (Figura 9.9).

9.6.3 Projeções convencionais

As projeções cartográficas que não são conformes nem equivalentes ou de igual área são chamadas de projeções convencionais. Estas são quase ilimitadas em variedade. Dentre estas há muitas projeções importantes e úteis.

Ortográfica

A projeção Ortográfica, desenvolvida por volta do Século 2 A.C., é uma projeção azimutal perspectiva que não é conforme nem equivalente ou de igual área. Esta projeção é usada nos casos polar, equatorial e oblíquo e resulta em vistas de um hemisfério completo. O aspecto polar da projeção tem meridianos como linhas retas que se interceptam no pólo a ângulos verdadeiros entre os meridianos. O pólo é um ponto, os paralelos são círculos centrados no pólo e não tem espaçamento igual. O espaçamento entre os paralelos decresce com o afastamento do pólo. A escala é verdadeira no pólo e para qualquer círculo que esteja centrado no centro da projeção. A projeção tem a aparência de um globo (Figura 9.8), e essencialmente é uma projeção perspectiva do globo em um plano de uma distância infinita (ortogonalmente). Normalmente é utilizada em vistas da Terra como se feita do espaço.

Gnomônica

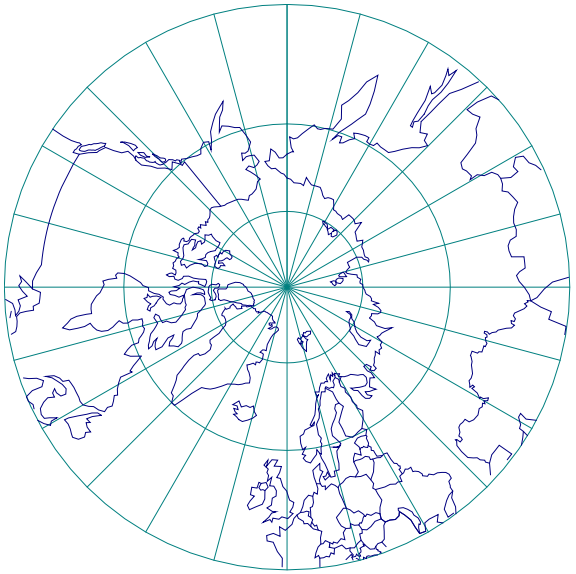


Figura 9.10. Projeção Gnomônica, que apresenta

circunferências máximas como retas.

A projeção Gnomônica não é conforme nem equivalente ou de igual área. Esta projeção é azimutal com o ponto de projeção localizado no centro da Terra, que lhe dá inspiração ao nome (isto é, centro da Terra, lugar onde vivem os gnomos). A projeção foi desenvolvida pelo grego Thales, possivelmente por volta de 580 A.C. Todas as circunferências máximas, meridianos e o equador, aparecem como linhas retas, uma propriedade única desta projeção (Figura 9.10).

A aparência do reticulado muda com o aspecto, assim como nas outras projeções azimutais. Os meridianos são linhas retas igualmente afastadas que se interceptam no pólo com ângulo verdadeiro no aspecto polar. Os paralelos são círculos centrados no pólo e não são espaçados igualmente para o caso do pólo ser o centro, e o espaçamento entre paralelos aumenta com o afastamento ao pólo. Esta projeção permite mostrar menos do que um hemisfério. A escala aumenta drasticamente com o aumento da distância ao centro da projeção. Seu uso está ligado à característica de representar circunferências máximas como linhas retas, e por isso servir aos navegadores e aviadores para determinar o caminho mais curto.

Azimutal Eqüidistante

Nesta projeção o aspecto polar tem meridianos igualmente espaçados representados como linhas retas e que se interceptam no pólo. Os ângulos entre os meridianos neste caso é verdadeiro. Os paralelos são círculos igualmente espaçados e centrados no pólo, que é um ponto. Toda a Terra pode ser representada, mas o pólo oposto é representado como um círculo envolvente com o raio igual ao dobro do raio do equador. No seu aspecto equatorial os meridianos são curvas complexas igualmente espaçadas ao longo do equador e se interceptam nos pólos. Os paralelos são curvas complexas e côncavas em direção ao pólo mais próximo, e tem espaçamento regular ao longo do meridiano central e dos meridianos a *90°* do meridiano central. A escala é verdadeira ao longo de qualquer linha reta irradiada do centro da projeção. A escala aumenta na direção perpendicular à direção radial com o aumento da distância ao centro da projeção. A distorção é moderada para um hemisfério, mas aumenta muito para mapas de toda a Terra. A distância, entre dois pontos quaisquer que estão sobre uma linha que contenha o centro da projeção, é mostrada em escala verdadeira; isso é uma característica útil se um dos pontos é o centro.

Esta projeção é usada em aspecto polar para mapas das regiões polares do hemisfério Norte e do hemisfério Sul, e a Terra da "era da aviação". O aspecto oblíquo é usado freqüentemente em mapas do mundo, centrados em cidades importantes e eventualmente em mapas de continentes. A projeção Azimutal Eqüidistante foi reconhecida pela Nações Unidas e é usadas em sua bandeira (Figura 9.11).

Figura 9.11. Projeção azimutal eqüidistante, para a manutenção das distâncias na bandeira das Organização das Nações Unidas.

Winkel Tripel

A projeção de Winkel Tripel não é conforme nem equivalente. Esta projeção foi apresentada pelo alemão Oswald Winkel em 1921.

Figura 9.12. Projeção de Winkel Tripel.

A projeção foi obtida a partir de cálculo de média de coordenadas ds projeções Cilíndrica Eqüidistante e de

Aitoff. Winkel aplicou o nome “Tripel”, que normalmente significa triplo, porque a projeção de Aitoff é um aspecto equatorial de um hemisfério da projeção Azimutal Eqüidistante, em que as coordenadas horizontais foram dobradas e os meridianos tiveram suas longitudes dobradas em valor.

O meridiano central é retilíneo. Outros meridianos são curvados, igualmente espaçados ao longo do equador e côncavos em direção ao meridiano central.

O equador e os pólos são retilíneos. Outros paralelos são curvados, igualmente espaçados ao longo do meridiano central e côncavos em direção ao pólo mais próximo. Os pólos são linhas retas com aproximadamente 0,4 do comprimento do equador, a depender da latitude dos paralelos padrão. A escala é verdadeira ao longo do meridiano central e constante ao longo do equador. A distorção é moderada, exceto para meridianos limite nas regiões polares. A projeção de Winkel Tripel é usada para mapas do mundo (Figura 9.12).

9.7 Visão Moderna de Projeções Cartográficas

9.7.1 Web Mercator

Muitos grandes serviços de mapeamento de rua online (*Bing Maps*, *OpenStreetMap*, *Google Maps*, *MapQuest*, *Yahoo Maps*, e outros) fazem, para suas imagens cartográficas, uso de uma variante da projeção de Mercator. A despeito das suas obvias variações de escala, a projeção é muito apropriada para um mapa interativo de mundo, que pode facilmente sofrer *zoom* para mapas de grande escala (locais), em que há relativamente pouca distorção devido à quase-conformidade da variante da projeção.

O fator de escala em um ponto em uma projeção conforme (tal com da Mercator esférica ou Mercator elipsoidal) é uniforme em todas as direções. Isso não é verdade na *Web* Mercator. Se denotada por m a distorção de escala ao longo da direção do meridiano e por n a distorção de escala ao longo da direção do paralelo. Então $m = n$, pois o fator de escala em um ponto é o mesmo em todas as direções na projeção de Mercator. Em outras palavras, a Mercator esférica é conforme.

As equações para a Mercator elipsoidal são um pouco mais complicadas, especialmente na direção Norte. Os parâmetros a (semi-eixo maior) e e (excentricidade) são dados de um elipsóide selecionado. Novamente $m = n$, pois o fator de escala num ponto é o mesmo em todas as direções na projeção de Mercator elipsoidal. Em outras palavras, a Mercator elipsoidal é conforme.

A projeção Web Mercator é a representação de latitudes e longitudes referidas ao datum WGS84 (i.e. elipsoidal) por meio de equações de Mercator esférica (em que R = a). Esta projeção foi popularizada pelo Google no Google Maps (não Google Earth) . O elipsóide de referência é sempre WGS84, e o raio esférico R é igual ao semi-eixo a maior do elipsóide WGS84.

O fator de escala em um ponto é agora diferente para cada direção. Este valor é uma função do raio de curvatura no meridiano, no primeiro vertical e da direção alfa. Para a *Web* Mercator, m e n não são iguais. Por isso a *Web* Mercator não é uma projeção conforme.

Se alguém usar a *Web* Mercator para obter direções para um novo restaurante através da cidade ou para visualização na tela de seu computador ou para algum propósitos na *web*, não haverá problema. Mas a projeção *Web* Mercator saltou de um domínio de uso (a *web*) para outro domínio de uso SIG (*GIS*), onde tem outra vida. Provas disso são os códigos de *EPSG*, *Esri* e *FME* para a *Web* Mercator. Os geodesistas e os profissionais de SIG devem saber que o *Web* Mercator não é conforme. Se cálculos de distância na *Web* Mercator são feitos simplesmente (como podem ser feitos em uma projeção conforme), estarão erradas. Se feitas corretamente, serão trabalhosas.

Para uma superfície do tamanho de uma quadrícula (usada nos Estados Unidos), as diferenças aparecem sutis. Resulta que as coordenadas Este são idênticas. As diferenças aparecem nas coordenadas Norte. Não há diferenças em coordenadas Norte no equador, mas a 70° Norte, a diferença é de 40 km. Este alongamento NS na *Web* Mercator é a razão de sua não conformidade.

As projeções de Mercator são úteis para a navegação porque as linhas de rumo aparecem como retas. Estas eram as linhas de orientação verdadeira constante que os navegadores usavam para navegar antes do *GPS*. De modo que, tem-se que ter em mente que as linhas retas na *Web* Mercator não são linhas de rumo.

Pode-se dizer sobre a *Web* Mercator:

- é uma projeção cilíndrica;
- os meridianos são linhas retas igualmente espaçadas;
- os paralelos são linhas retas e não são espaçados igualmente, mas de um modo diferente daquele da projeção de Mercator conforme;
- as loxodrômicas (linhas de rumo) não são linhas retas;
- não é uma projeção perspectiva;

- os pólos estão no infinito;
- a projeção não foi apresentada por Mercator em 1569, mas pelo *Google* recentemente; e
- não é conforme.

9.7.2 Página Map Projection Transitions

O programa computacional *Map Projection Transitions* é um exemplo das múltiplas aplicações oferecidas por Jason Davies. O sitio de *web* (*http://www.jasondavies.com/maps/transition*) apresenta um mapa com reticulado e limites de paises na projeção de Aitoff com o pólo Sul. O mapa não é estático, mas animado. O pólo Sul move-se para baixo e a Terra gira em torno de seus pólos. A animação dura cinco segundos, depois dos quais a projeção muda e o movimento continua por cinco segundos, depois a projeção muda novamente. O nome das projeções aparece em uma janela separada. Há um total de 56 projeções. O pólo Sul eventualmente se torna invisível e o pólo Norte aparece no topo. Diversas partes da Terra aparecem no centro do mapa pela rotação em torno dos pólos (Figura 9.13).

Ao clicar *Pause*, a animação para e é possível selecionar outra projeção. Ao clicar o botão esquerdo, é possível mover a imagem e selecionar o aspecto da projeção – normal, transverso, ou qualquer das inúmeras projeções oblíquas. Desse modo pode-se claramente ver a diferença entre duas projeções. Por exemplo, pode-se selecionar a projeção Ginzburg IV e seu aspecto normal por um movimento de mouse. Se alguém quiser ver como o reticulado desta projeção é diferente da similar projeção de Winkel Tripel, basta clicar na projeção *Winkel Tripel* num menu *drop-down*. A imagem da tela mudará para a projeção de Winkel e as diferenças serão visíveis.

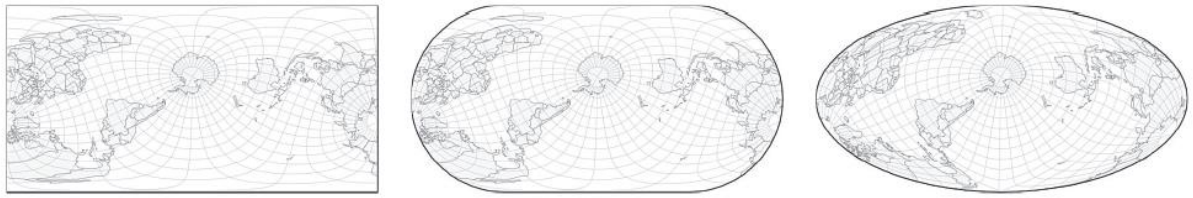


Figure 9.13. Da aplicação Map Projection Transitions (http://www.jasondavies.com/maps/transition)

Ao clicar em *Maps*, há um conjunto de novas e interessante aplicações voltadas a mapas interrompidos, mapas em forma de borboleta, projeções retro-azimutais e outras projeções. É possível usar o mouse para mover as imagens em muitas daquelas aplicações. Por exemplo, ao selecionar a projeção sinuisoidal interrompida, um mapa do mundo em três segmentos aparecerá. O mouse pode ser usado para mover partes da Terra de um segmento para outro, e a barra de deslizamento da parte baixa da tela pode ser usada para mudar o número de segmentos de um mapa do mundo não interrompido para uma representação em 24 segmentos.

Neste programa está disponível uma opção para a projeção em estrela de Berghaus (*Snyder and Voxland, 1989*). A aplicação *Azimuth and Distance from London* permite o uso do mouse para obter distâncias e azimutes a partir de Londres para qualquer ponto na Terra em um mapa do mundo feito em uma projeção cilíndrica oblíqua eqüidistante e na projeção azimutal eqüidistante oblíqua. Se um texto que acompanha a aplicação menciona uma projeção, há um *link* para a *Wikipedia* para se alcançar informação mais detalhada acerca da projeção.

9.7.3 Pesquisa em Novas Projeções Cartográficas

Em 2007, inspirados no método de Robinson, B Jenny, T. Patterson e L Hurni produziram o programa interativo *Flex Projector*, que facilmente permite ao usuário criar novas projeções cartográficas do mundo. O programa suporta o aspecto normal de projeções cilíndricas. O programa é livre e *opensource* e opera em *Linux*, *Mac OS X* e *Windows*. Ao executar o programa na tela aparece um mapa do mundo na projeção de Robinson (Figura 9.14). O lado direito da tela tem barras deslizantes para modificar o comprimento dos paralelos. Clicar no botão *Distances* traz um deslizante para modificar distâncias de paralelos do equador. A curvatura dos paralelos (dobra) e as distâncias entre os meridianos podem também ser modificadas. A opção *Linked Sliders* permite ao usuário mover cada deslizante separadamente ou vários de uma vez. A próxima opção *Move* é usada para escolher a forma da curva como efeito da mudança realizada no deslizante. A razão entre o meridiano central e o equador pode ser modificada com o deslizante *Proportions (height/width)*. Ao invés de modificar a projeção de Robinson, pode-se iniciar com uma das várias projeções disponíveis dos três grupos mencionados. Se o resultado não for satisfatório pode-

se usar a opção *Reset Projection* e voltar à projeção inicial. Esta opção está no canto superior direito da tela.

Ao clicar *Display* abrem-se opções adicionais. O comprimento do meridiano central pode ser modificado, a densidade o reticulado pode ser escolhida, as elipses de distorção podem ser desenhadas nos nós de interseção do reticulado, e podem ser desenhados os isogramas de distorção em área e de máxima distorção em ângulo. O fundo da recente projeção criada pode incluir o reticulado e o limite dos continentes em qualquer projeção ativada (*Show Second Projection*). O canto inferior esquerdo contém a síntese ou indicação numérica das distorções em comprimento, área e ângulo para todas as projeções ativadas e da projeção criada pelo usuário (Figura 9.14).

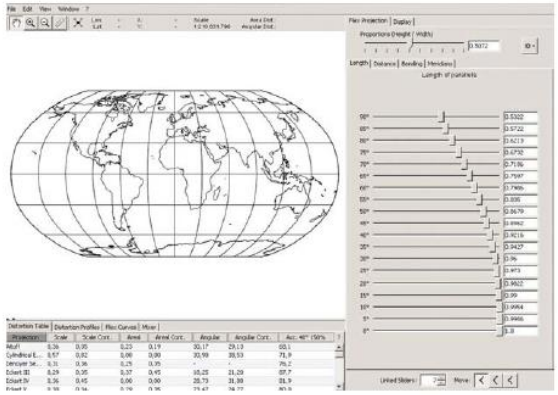


Figura 9.14. Interface do programa Flex Projector.

O programa *Flex Projections* pode importar e exportar dados vetoriais e dados matriciais em diversos formatos. O programa é recomendado a qualquer um que queira experimentar a criação de novas projeções de mapas do mundo, e também pode ser aplicado no ensino de projeções cartográficas.

A técnica de combinar duas projeções cartográficas fonte para criar uma nova projeção permite a criação de uma grande variedade de projeções. A técnica mencionada pode também ser estendida. Por exemplo, o software *Geocart* da *Mapthematics* pode misturar parâmetros de projeções, tais como latitude de paralelos padrão, entre duas projeções fonte. De modo alternativo, mais do que duas projeções podem ser combinadas para formar uma nova. O caso extremo poderia ser um número infinito de projeções parametrizadas diferentemente, que é o conceito por trás das projeções policônica e policilíndricas. Há métodos alternativos para criar uma nova projeção a partir de um esquema, derivando-a de projeções existentes ou ajustando parâmetros de projeção para criar uma nova. Algumas destas técnicas são usadas em projeções de composição adaptativa para mapas de *web*, um novo campo de pesquisa em projeções cartográficas. O propósito nesta pesquisa é desenvolver uma alternativa à projeção *Web* Mercator para mapas de *web* em pequenas escalas, caso em que um mapa é feito automaticamente numa projeção ótima para uma determinada escala, a razão altura largura do mapa, e a latitude central da área de apresentação.

9.8 Projeções Sugeridas

A razão que se tem para ter tantas projeções cartográficas está no fato de que nenhuma serve a todas as necessidades. A seleção de uma projeção apropriada para uma dada aplicação depende de uma variedade de fatores, dentre elas, da finalidade do mapa, do tipo de dado a ser projetado, da região do mundo a ser projetada e da escala final do mapa. Sugestões sobre a seleção são disponíveis de numa variedade de fontes impressas e de *web* (ver a seção Leitura Complementar). Em SIG, conjuntos de dados de grande escala (pequenas extensões de superfície) são projetados em projeções conformes para preservar os ângulos. Para tais aplicações, a distorção em área é muito pequena comparativamente à extensão representada, e que é desprezível, e uma projeção equivalente não é necessária. De modo geral, são usados arquivos de dados de grande escala em aplicações SIG de extensão geográfica limitada (p.ex., uma bacia hidrográfica, um município ou um estado). As duas projeções cartográficas mais usadas nestes casos são a Cônica Conforme de Lambert e a Transversa de Mercator, que é a base da UTM e da maioria dos sistemas de coordenadas públicos (*State Plane*) usados nos Estados Unidos. Para mapas do mundo de propósito geral, a recomendação é não usar nenhuma projeção cilíndrica, mas alguma pseudo-cilindrica (p.ex. Robinson ou uma projeção como Winkel Tripel).

9.9 Conclusões

As projeções cartográficas e as transformações de coordenadas são a base para alcançar uma base de referência comum para a informação geográfica. A necessidade de um elipsóide comum, *datum*, projeção cartográfica e finalmente, sistemas de coordenadas planas, tornam possível usar a geometria plana para todos os tipos de sobreposições espaciais e de análises espaciais. A projeção de dados geográficos da Terra elipsoidal para um sistema de coordenadas plano sempre resulta em distorção de área, forma, distância e de outras propriedades. Com a seleção adequada de uma projeção, o usuário pode manter alguma característica desejável ao custo de outras. Neste capítulo foram examinados brevemente os conceitos

elementares de sistemas de coordenadas e de projeções cartográficas. Para um tratamento mais aprofundado, o leitor é orientado a procurar textos e fontes referidas na seção Leitura Complementar.

9.10 Leitura Complementar

Referências complementares e um exercício com perguntas e respostas estão no Capítulo 18.

Livros eletrônicos Google sobre Projeções Cartográficas

Bureau of Navigation (1869): *Projection Tables for the Use of the United States Navy Comprising A New Table of Meridional Parts for the Mercator Projection*, Government Printing Office, Washington.

De Morgan, A. (1836): *An Explanation of the Gnomonic Projection of Sphere*, Baldwin and Cradock, London.

Department of the Army (1967): *Grids and Grid References*. United States Headquarters, Department of Army.

Snyder, J. P. (1987): *Map Projections Working Manual*. US Geological Survey, Professional paper 1395, Washington.

Snyder, J. P. and H. Steward (1988): *Bibliography of map projections*, US Geological Survey Bulletin 1856.

Spilhaus, A. (1991): *Atlas of the World Geophysical Boundaries—Ocean, Continents and Tectonic Plates Their Entirety*. American Philosophical Society, Philadelphia.

Livros sobre Projeções Cartográficas disponíveis na Internet

Anoni, A., C. Luzet, E. Gubler, and J. Ihde (Eds.) (2003): *Map projections for Europe*. Institute for Environment and Sustainability, European Communities. http://www.ec-gis.org/sdi/publist/pdfs/annoni- etal2003eur.pdf

Frankich, K. (1982): *Optimization of geographic map projections for Canadian territory*. Simon Fraser University, Vancouver. http://summit.sfu.ca/item/4135

Hager, J. W., J. F. Behensky, and B.W. Drew (1989): *The universal grids: Universal Transverse Mercator (UTM) and Universal Polar Stereographic (UPS)*. Tech. Rep. TM 8358.2, Defense Mapping Agency. http://earth-info.nga.mil/GandG /publications/tm8358.2/TM8358_2.pdf

Krüger, J. H. L. (1912): Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene. New Series 52. Royal Prussian Geodetic Institute, Potsdam. http://bib.gfz-potsdam.de/pub/digi/krueger2.pdf

Snyder, J. P. and M. P. Voxland (1989): *Album of Map Projection*, US Geological Survey, Professional Paper 1453. http://pubs.usgs.gov/pp/1453/report.pdf

Thomas, P. D. (1952): *Conformal projections in geodesy and cartography*. Special Publication 251. US Coast and Geodetic Survey. http://docs.lib.noaa.gov/rescue/cgs_specpubs/QB275U35no2511952.pdf

Tobler, W. R. (1961): *Map transformation of geographic space*. University of Washington, Seattle. http://www.geog.ucsb.edu/~tobler/publications/pdf_docs/cartography/projections/cartograms/Transformations.pdf